7. Équation de propagation de la lumière

7.1 Introduction

Le cœur de la présente théorie est que la lumière possède un milieu de propagation. Ainsi Maxwell aurait écrit ses fameuses équations dans un **Référentiel Privilégié** que j'appelle **Référentiel de Maxwell** ou également **Référentiel Lumière** car la lumière se propage réellement, physiquement à la même vitesse constante c et cela dans toutes les directions dans ce référentiel.

Il est alors fondamental d'introduire deux types de référentiels :

- le premier type est appelé « référentiel matière » car les référentiels de ce type sont dotés d'horloges et de règles qui sont faites de matière, c'est-à-dire d'atomes et subissent les effets de dilatation des durées et de contraction des longueurs en fonction de leur vitesse par rapport au Référentiel Privilégié ;
- le second type est appelé « référentiel assimilé RP ». Le nom de ces référentiels vient du fait que, malgré qu'ils soient en translation rectiligne uniforme par rapport au Référentiel Privilégié, ils sont dotés par la pensée des mêmes horloges (même période) et des mêmes règles (même longueur) que celles du Référentiel Privilégié.

Lorsque l'on utilise les « référentiels matière », les horloges associées subissant la dilatation de leur période et les règles associées subissant une contraction de leur longueur, il est nécessaire d'utiliser **la transformation de Lorentz pour passer d'un référentiel à un autre** et les équations de Maxwell demeurent invariantes par cette transformation.

En revanche, lorsque l'on utilise les « référentiels assimilés RP », ceux-ci étant dotés des mêmes horloges et des mêmes règles que celles du Référentiel Privilégié, il est nécessaire et suffisant d'utiliser la loi de composition classique des vitesses pour passer d'un référentiel à un autre.

Ce chapitre traite de l'équation de propagation de la lumière écrite pour ces « référentiels assimilés RP ».

7.2 Généralisation de l'équation de propagation à un référentiel assimilé RP

On appelle R_0 le Référentiel Privilégié, R_1 un référentiel assimilé RP en translation à la vitesse $\overrightarrow{V_1} = V_1\overrightarrow{u_x}$ par rapport à R_0 et R_2 un référentiel assimilé RP en translation à la vitesse $\overrightarrow{V_2} = V_2\overrightarrow{u_x}$ par rapport à R_0.

De par la définition même des référentiels assimilés RP qui possèdent des horloges de même période et des règles de même longueur que celles dans le Référentiel Privilégié, il est légitime d'utiliser un changement de référentiel classique $\begin{cases} \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{V_1}t + \overrightarrow{r_1} \\ t_0 = t_1 \end{cases}$ afin d'en déduire l'équation de propagation généralisée à un référentiel assimilé RP quelconque.

Après manipulation des équations de Maxwell, on obtient l'équation différentielle de propagation du champ électrique E dans le référentiel R_0 (équation de propagation à une seule dimension suivant l'axe x'x) :

$$\boxed{c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t_0^2} = 0} \qquad (1)$$

En posant $\begin{cases} x_0 = x_1 + V_1.t_1 \\ t_0 = t_1 \end{cases}$ qui peut s'écrire également $\begin{cases} x_1 = x_0 - V_1.t_0 \\ t_1 = 1.t_0 + 0.x_0 \end{cases}$, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial x_0} = \frac{\partial E}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial x_0} + \frac{\partial E}{\partial t_1}.\frac{\partial t_1}{\partial x_0} = \frac{\partial E}{\partial x_1} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2}.$$

$$\frac{\partial E}{\partial t_0} = \frac{\partial E}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial t_0} + \frac{\partial E}{\partial t_1}.\frac{\partial t_1}{\partial t_0} = \frac{\partial E}{\partial x_1}(-V_1) + \frac{\partial E}{\partial t_1} \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t_0^2} = V_1^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} - 2V_1 \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial t_1} + \frac{\partial^2 E}{\partial t_1^2}.$$

L'équation (1) devient alors dans le référentiel R_1 :

$$\boxed{\left(c^2 - V_1^2\right)\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} + 2V_1 \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial t_1} - \frac{\partial^2 E}{\partial t_1^2} = 0} \qquad (2)$$

Cette équation serait l'équation de propagation généralisée à un référentiel assimilé RP quelconque.

On verra également que le terme croisé $\frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial t_1}$ est très important. Il permet de conserver la propagation d'une onde (une parmi les deux ondes solutions de l'équation) même dans un référentiel se déplaçant à la même vitesse que la première onde EM (Électromagnétique).

7.3 Démonstration de l'invariance de l'équation de propagation généralisée

Établissons maintenant le résultat extrêmement important que l'équation de propagation généralisée garde bien la même forme quel que soit le référentiel assimilé RP choisi ou dit autrement que l'équation de propagation généralisée est invariante.
Pour cela, montrons qu'en partant de l'équation (2) écrite dans le référentiel R_1 et en allant vers un autre référentiel quelconque R_2 en translation à la vitesse V_2 par rapport à R_0, on retrouve bien une équation de propagation de la même forme.

En posant $\begin{cases} x_0 = x_2 + V_2.t_2 \\ t_0 = t_2 \end{cases}$ on obtient $\begin{cases} x_2 = x_1 + (V_1 - V_2).t_1 \\ t_2 = 1.t_1 + 0.x_1 \end{cases}$

On peut donc écrire :

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = \frac{\partial E}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial E}{\partial t_2}.\frac{\partial t_2}{\partial x_1} = \frac{\partial E}{\partial x_2} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t_1} = \frac{\partial E}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \frac{\partial E}{\partial t_2}.\frac{\partial t_2}{\partial t_1} = \frac{\partial E}{\partial x_2}(V_1 - V_2) + \frac{\partial E}{\partial t_2}$$

d'où $$\frac{\partial^2 E}{\partial t_1^2} = (V_1 - V_2)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} + 2(V_1 - V_2)\frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial t_2} + \frac{\partial^2 E}{\partial t_2^2}$$

et $$\frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial t_1} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial t_2}\frac{\partial t_2}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}(V_1 - V_2) + \frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial t_2}$$

L'équation (2) devient alors :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}\left[\left(c^2 - V_1^2\right) + 2.V_1\left(V_1 - V_2\right) - \left(V_1 - V_2\right)^2\right] + \frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial t_2}\left[2.V_1 - 2\left(V_1 - V_2\right)\right] - \frac{\partial^2 E}{\partial t_2^2} = 0$$

On trouve finalement l'équation suivante :

$$\boxed{\left(c^2 - V_2^2\right)\frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} + 2V_2\frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial t_2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t_2^2} = 0} \qquad (3)$$

Cette équation est exactement la même que celle que l'on aurait obtenue en passant directement du référentiel R_0 au référentiel R_2.

Ce résultat est très important. En effet, il montre que l'équation généralisée (2) est consistante car elle reste invariante par changement de référentiel assimilé RP en utilisant les transformations de coordonnées classiques (autrement dit les équations (2) et (3) sont identiques à l'indice 1 ou 2 près).

De plus, l'équation de propagation généralisée redonne l'équation de Maxwell « classique » en prenant $V_1 = 0$. En effet, on obtient alors : $\boxed{c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t_1^2} = 0}$.

Une solution possible de l'équation de propagation généralisée peut s'écrire :
$\vec{E} = \vec{E_0} e^{j\left(\omega_1 t_1 - \vec{k_1}.\overrightarrow{O_1M_1}\right)}$ sous la forme complexe ou $\vec{E} = \vec{E_0}.\cos\left(\omega_1.t_1 - \vec{k_1}.\overrightarrow{O_1M_1}\right)$ sous la forme réelle.

En remplaçant cette expression dans l'équation de propagation généralisée, on obtient :

$$k_1^{\,2}\left(c^2 - V_1^{\,2}\right) - 2.V_1.k_1.\omega_1 - \omega_1^{\,2} = 0$$

Pour $V_1 \neq c$ et $V_1 \neq -c$, les deux solutions de cette équation sont :

$$k_{1+} = \frac{\omega_1}{c - V_1} \qquad \text{et} \qquad k_{1-} = \frac{\omega_1}{-c - V_1}$$

Ainsi, très clairement, on montre que les deux solutions de l'équation de propagation issue des équations de Maxwell sont deux ondes dont l'une se propage vers les x négatifs à la vitesse $c_{1-} = -c-V_1$ et l'autre se propage vers les x positifs à la vitesse $c_{1+} = c-V_1$ dans le référentiel R_1.

Dans le cas où $V_1^2 = c^2$ (c'est-à-dire $V_1 = c$ ou $V_1 = -c$), l'équation de propagation s'écrit $2V_1\frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial t_1} - \frac{\partial^2 E}{\partial t_1^2} = 0$ et la solution $\vec{E} = \vec{E_0} e^{j\left(\omega_1 t - \vec{k_1}.\overrightarrow{O_1M_1}\right)}$ donne l'équation suivante : $\boxed{2.V_1.k_1.\omega_1 + \omega_1^{\,2} = 0}$.

Dans le cas où $V_1 = c$ et $\omega_1 \neq 0$ on a : $k_{1-} = \frac{\omega_1}{-2.c} = \frac{\omega_1}{c_{1-}}$.

Un observateur lié à R_1 ne verra qu'une seule onde s'éloigner de lui à la vitesse $c_{1-} = -2c$.

Dans le cas où $V_1 = -c$ et $\omega_1 \neq 0$ on a : $k_{1+} = \frac{\omega_1}{2.c} = \frac{\omega_1}{c_{1+}}$.

Un observateur lié à R_1 ne verra qu'une seule onde s'éloigner de lui à la vitesse $c_{1+} = 2c$.

Dans le référentiel R_0 on a : $k_{0-} = \frac{\omega_0}{-c}$ et $k_{0+} = \frac{\omega_0}{c}$ et donc $c_{0-} = -c$ et $c_{0+} = c$.

Certains auteurs interprètent, à mon avis à tort, les deux solutions de l'équation de propagation de Maxwell comme étant deux ondes dont l'une se propage dans le futur (ce qui est normal) et la deuxième dans le passé ! En fait, je pense qu'il faut interpréter les deux ondes obtenues comme l'une allant à la vitesse c_- dans le sens des x négatifs et l'autre allant à la vitesse c_+ dans le sens des x positifs. Les deux vitesses obtenues dans un référentiel R_1 (R_1 se déplaçant à la vitesse V_1 par rapport au référentiel de référence R_0) montrent bien la signification physique des deux solutions de l'équation de propagation des ondes EM.

Pour approfondir juste un peu cela, il faut dire que l'équation de propagation de Maxwell est une **équation différentielle du second ordre** et donc les solutions de cette équation vont être des ondes qui se propagent avec des vecteurs vitesse qui vont avoir les propriétés suivantes :

- à une seule dimension (qui est le cas des calculs menés jusqu'ici), les extrémités des vecteurs vitesse vont être équidistants de l'origine dans le Référentiel de Maxwell R_0 (c_{0-} = -c et c_{0+} = c) et non équidistants de l'origine dans le référentiel R_1 assimilé RP (c_{1-} = -c-V_1 et c_{1+} = c-V_1) ;
- à deux dimensions, les extrémités des vecteurs vitesse vont être équidistants de l'origine dans le Référentiel de Maxwell R_0 (donc sur un cercle d'équation $c_{0x}^2 + c_{0y}^2 = c^2$) et sur un cercle d'équation $(c_{1x} + V_1)^2 + c_{1y}^2 = c^2$ dans le référentiel R_1 assimilé RP en translation à la vitesse $\overrightarrow{V_1} = V_1\overrightarrow{u_x}$ par rapport à R_0. En effet, de l'équation $x_0 = x_1 + V_1.t_1$, on en déduit $c_{0x} = c_{1x} + V_1$ qui est la composition classique des vitesses et valable entre référentiels assimilés RP ;
- à trois dimensions, les extrémités des vecteurs vitesse vont être équidistants de l'origine dans le Référentiel de Maxwell R_0 (donc sur une sphère d'équation $c_{0x}^2 + c_{0y}^2 + c_{0z}^2 = c^2$) et sur une sphère d'équation $(c_{1x} + V_1)^2 + c_{1y}^2 + c_{1z}^2 = c^2$ dans le référentiel R_1 assimilé RP en translation à la vitesse $\overrightarrow{V_1} = V_1\overrightarrow{u_x}$ par rapport à R_0. Comme dans le cas à deux dimensions, la relation $x_0 = x_1 + V_1.t_1$ implique $c_{0x} = c_{1x} + V_1$.

Démonstration dans le cas général à trois dimensions que les extrémités des vecteurs vitesse sont sur une sphère d'équation $(c_{1x} + V_{1x})^2 + (c_{1y} + V_{1y})^2 + (c_{1z} + V_{1z})^2 = c_0^2$ dans le référentiel R_1 assimilé RP.

Nous avons les relations de passage entre le Référentiel de Maxwell R_0 et un référentiel R_1 assimilé RP : $\begin{cases} x_0 = x_1 + V_{1x}.t \\ y_0 = y_1 + V_{1y}.t \\ z_0 = z_1 + V_{1z}.t \\ t_0 = t_1 \end{cases}$ ce qui implique également : $\begin{cases} c_{0x} = c_{1x} + V_{1x} \\ c_{0y} = c_{1y} + V_{1y} \\ c_{0z} = c_{1z} + V_{1z} \end{cases}$.

L'équation de propagation dans le Référentiel de Maxwell R_0 s'écrit

$$\boxed{c_0^2\left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z_0^2}\right) - \frac{\partial^2 E_i}{\partial t_0^2} = 0}$$

et a pour solution :

$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}e^{j\left(\omega_0 t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right)}$ sous la forme complexe ou $\vec{E} = \overrightarrow{E_0}.\cos\left(\omega_0.t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right)$ sous la forme réelle.

En partant de la solution réelle et en dérivant, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial x_0} = -E_0(-k_{0x})\sin\left(\omega_0.t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x_0^2} = -E_0(-k_{0x})^2\cos\left(\omega_0.t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right).$$

$$\frac{\partial E}{\partial y_0} = -E_0(-k_{0y})\sin\left(\omega_0.t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y_0^2} = -E_0(-k_{0y})^2\cos\left(\omega_0.t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right).$$

$$\frac{\partial E}{\partial z_0} = -E_0(-k_{0z})\sin\left(\omega_0.t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z_0^2} = -E_0(-k_{0z})^2\cos\left(\omega_0.t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right).$$

$$\frac{\partial E}{\partial t_0} = -E_0(\omega_0)\sin\left(\omega_0.t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 E}{\partial t_0^2} = -E_0(\omega_0)^2\cos\left(\omega_0.t_0 - \overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{O_0M_0}\right).$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation de propagation, on obtient :

$$-c_0^2.k_{0x}^2 - c_0^2.k_{0y}^2 - c_0^2.k_{0z}^2 = -\omega_0^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2 = \left(\frac{\omega_0}{c_0}\right)^2}.$$

Nous avons également les égalités $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{c_0.T_0} = \frac{\omega_0}{c_0}$.

De plus, pour un rayon lumineux radial émis par la source, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{k_0} = k_0\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{c_0} = c_0\overrightarrow{u_r} \end{cases}$$ où $\overrightarrow{u_r}$ représente le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques.

Nous pouvons donc écrire les relations :

$$\begin{cases} \frac{c_{0x}}{c_0} = \frac{k_{0x}}{k_0} \\ \frac{c_{0y}}{c_0} = \frac{k_{0y}}{k_0} \\ \frac{c_{0z}}{c_0} = \frac{k_{0z}}{k_0} \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} c_{0x} = k_{0x}\frac{c_0}{k_0} = k_{0x}\frac{c_0^2}{\omega_0} \\ c_{0y} = k_{0y}\frac{c_0}{k_0} = k_{0y}\frac{c_0^2}{\omega_0} \\ c_{0z} = k_{0z}\frac{c_0}{k_0} = k_{0z}\frac{c_0^2}{\omega_0} \end{cases}.$$

L'équation $k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2 = \left(\frac{\omega_0}{c_0}\right)^2$ devient alors $\left(\frac{\omega_0}{c_0^2}c_{0x}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{c_0^2}c_{0y}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{c_0^2}c_{0z}\right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{c_0}\right)^2$

c'est-à-dire : $\boxed{c_{0x}^2 + c_{0y}^2 + c_{0z}^2 = c_0^2}$.

Enfin, en utilisant les relations $\begin{cases} c_{0x} = c_{1x} + V_{1x} \\ c_{0y} = c_{1y} + V_{1y} \\ c_{0z} = c_{1z} + V_{1z} \end{cases}$, on obtient l'équation désirée :

$$\boxed{(c_{1x} + V_{1x})^2 + (c_{1y} + V_{1y})^2 + (c_{1z} + V_{1z})^2 = c_0^2}.$$

7.4 Généralisation de l'équation de propagation à trois dimensions

Il est possible de montrer qu'en trois dimensions l'équation de propagation s'écrit :

- $\boxed{c^2\Delta\vec{E} - \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t_0^2} = \vec{0}}$ c'est-à-dire $\boxed{c^2\left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z_0^2}\right) - \frac{\partial^2 E_i}{\partial t_0^2} = 0}$ avec i ∈ {x,y,z} dans le Référentiel de Maxwell R_0
- $\boxed{(c^2 - V_1^2)\frac{\partial^2 E_i}{\partial x_1^2} + c^2\frac{\partial^2 E_i}{\partial y_1^2} + c^2\frac{\partial^2 E_i}{\partial z_1^2} + 2V_1\frac{\partial^2 E_i}{\partial x_1\partial t_1} - \frac{\partial^2 E_i}{\partial t_1^2} = 0}$ avec i ∈ {x,y,z} dans le référentiel R_1 assimilé RP en translation à la vitesse $\overrightarrow{V_1} = V_1\overrightarrow{u_x}$ par rapport à R_0.

Il est important de noter que, quel que soit le mouvement de translation du référentiel R_1 par rapport au référentiel R_0, il est toujours possible de choisir l'axe des x (abscisses) parallèle au mouvement de R_1 par rapport à R_0.

Cependant, je vais donner l'équation de propagation généralisée à 3 dimensions pour un référentiel R assimilé RP se déplaçant à la vitesse $\vec{V} = V_x\overrightarrow{u_x} + V_y\overrightarrow{u_y} + V_z\overrightarrow{u_z}$ par rapport au référentiel de Maxwell R_0.

On a alors : $\begin{cases} x_0 = x + V_x.t \\ y_0 = y + V_y.t \\ z_0 = z + V_z.t \\ t_0 = t \end{cases}$ que l'on peut écrire également $\begin{cases} x = x_0 - V_x.t_0 \\ y = y_0 - V_y.t_0 \\ z = z_0 - V_z.t_0 \\ t = t_0 \end{cases}$

On a : $\dfrac{\partial E}{\partial x_0} = \dfrac{\partial E}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial x_0} + \dfrac{\partial E}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial x_0} + \dfrac{\partial E}{\partial z}.\dfrac{\partial z}{\partial x_0} + \dfrac{\partial E}{\partial t}.\dfrac{\partial t}{\partial x_0}$ avec $E \in \{E_x, E_y, E_z\}$

Ce qui donne $\dfrac{\partial E}{\partial x_0} = \dfrac{\partial E}{\partial x}$. De même, on a $\dfrac{\partial E}{\partial y_0} = \dfrac{\partial E}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial E}{\partial z_0} = \dfrac{\partial E}{\partial z}$.

D'où les expressions suivantes : $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x_0^2} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 E}{\partial y_0^2} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 E}{\partial z_0^2} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}$.

L'expression de la dérivée partielle par rapport au temps est beaucoup plus longue :

$$\frac{\partial E}{\partial t_0} = \frac{\partial E}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t_0} + \frac{\partial E}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t_0} + \frac{\partial E}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial t_0} + \frac{\partial E}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial t_0}$$

d'où $\dfrac{\partial E}{\partial t_0} = -V_x\dfrac{\partial E}{\partial x} - V_y\dfrac{\partial E}{\partial y} - V_z\dfrac{\partial E}{\partial z} + \dfrac{\partial E}{\partial t}$.

Enfin, on a :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t_0^2} = \begin{aligned} &-V_x\left(-V_x\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - V_y\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} - V_z\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t}\right) \\ &-V_y\left(-V_x\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x} - V_y\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - V_z\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial y \partial t}\right) \\ &-V_z\left(-V_x\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial x} - V_y\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial y} - V_z\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t}\right) \\ &+\left(-V_x\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} - V_y\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial y} - V_z\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right) \end{aligned}$$

Cela peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t_0^2} = \begin{aligned} &V_x^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + V_y^2\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + V_z^2\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ &+ 2.V_x.V_y.\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} + 2.V_y.V_z.\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial z} + 2.V_x.V_z.\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial z} \\ &- 2.V_x.\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} - 2.V_y.\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial y} - 2.V_z.\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial z} \end{aligned}$$

D'où l'expression finale de l'équation de propagation généralisée à 3 dimensions dans un référentiel R assimilé RP :

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(c^2-V_x^2\right)\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\left(c^2-V_y^2\right)\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\left(c^2-V_z^2\right)\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\\&-2.V_x.V_y.\frac{\partial^2 E}{\partial x\partial y}-2.V_y.V_z.\frac{\partial^2 E}{\partial y\partial z}-2.V_x.V_z.\frac{\partial^2 E}{\partial x\partial z}\\&+2.V_x.\frac{\partial^2 E}{\partial t\partial x}+2.V_y.\frac{\partial^2 E}{\partial t\partial y}+2.V_z.\frac{\partial^2 E}{\partial t\partial z}-\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0\end{aligned}} \qquad \text{(E1)}$$

Nous appelons le Référentiel Privilégié « Référentiel de Maxwell », car c'est uniquement dans ce référentiel que l'équation de propagation « classique » est valable parmi tous les référentiels assimilés RP, ou « Référentiel Lumière » car c'est l'unique référentiel dans lequel la lumière se propage réellement, physiquement à la vitesse constante c dans toutes les directions.

Remarque 1 : si l'on désire retrouver une équation de propagation du champ électromagnétique identique dans le référentiel R_0 et R_1, il faut « absorber » le coefficient $\gamma^2=\frac{c}{(c-V_1)}\frac{-c}{(-c-V_1)}=\frac{c^2}{c^2-V_1^2}=\frac{1}{1-\frac{V_1^2}{c^2}}$ par la variable espace, la variable temps, ou bien la répartir sur les deux en prenant γ^{-1} et γ (ce dernier choix est obligatoire pour garder les équations de Maxwell elles-mêmes invariantes et pas seulement l'équation de propagation).

Remarque 2 : dans certains ouvrages (par exemple « Mécanique quantique relativiste » de Michael Klasen), l'équation de propagation est donnée sous la forme « compacte » suivante :

$$\boxed{\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2}{c^2}\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\right)E=0} \qquad \text{(E2)}$$

Nous allons vérifier que nous retrouvons bien l'expression (E1) en développant l'expression (E2) :

$$\nabla^2 E-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\frac{2}{c^2}\left(V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+V_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\left(V_x\frac{\partial E}{\partial x}+V_y\frac{\partial E}{\partial y}+V_z\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2=0$$

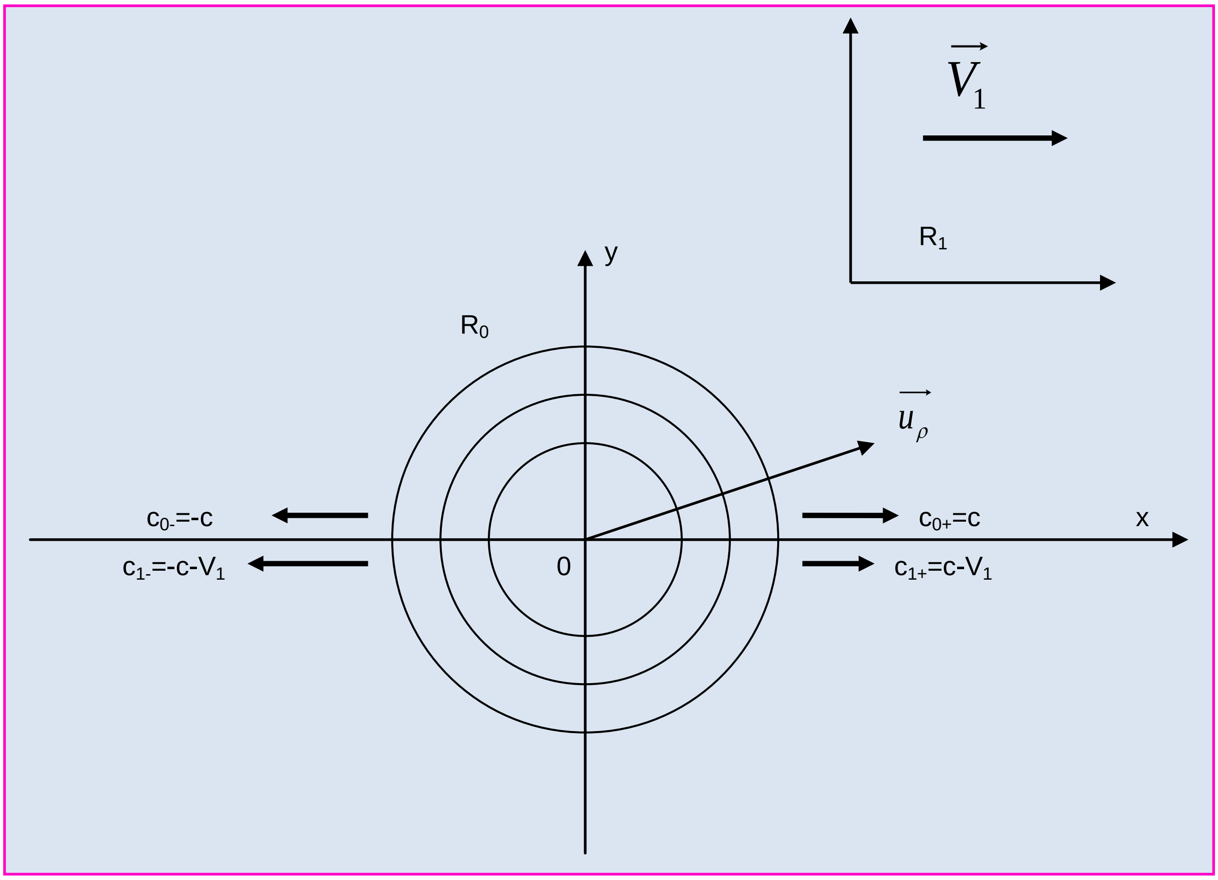
$$c^2\nabla^2 E-\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+2\left(V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+V_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial E}{\partial t}-\left(V_x^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+V_y^2\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+V_z^2\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)$$
$$-\left(2.V_xV_y\frac{\partial^2 E}{\partial x\partial y}+2.V_yV_z\frac{\partial^2 E}{\partial y\partial z}+2.V_xV_z\frac{\partial^2 E}{\partial x\partial z}\right)=0$$

On retrouve bien l'équation (E1) en la récrivant de la façon suivante :

$$c^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+2\left(V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+V_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial E}{\partial t}$$
$$-\left(V_x^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+V_y^2\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+V_z^2\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)-\left(2.V_xV_y\frac{\partial^2 E}{\partial x\partial y}+2.V_yV_z\frac{\partial^2 E}{\partial y\partial z}+2.V_xV_z\frac{\partial^2 E}{\partial x\partial z}\right)=0$$

7.5 Illustration de l'équation de propagation par le calcul et le tracé des fronts d'onde

Nous allons illustrer toutes ces équations par des graphiques obtenus de façon assez simple.
Les deux schémas ci-dessous montrent une coupe d'une onde EM sphérique se propageant dans le référentiel de Maxwell R_0 et le référentiel R_1 (en translation à la vitesse $\overrightarrow{V_1}$ par rapport à R_0).



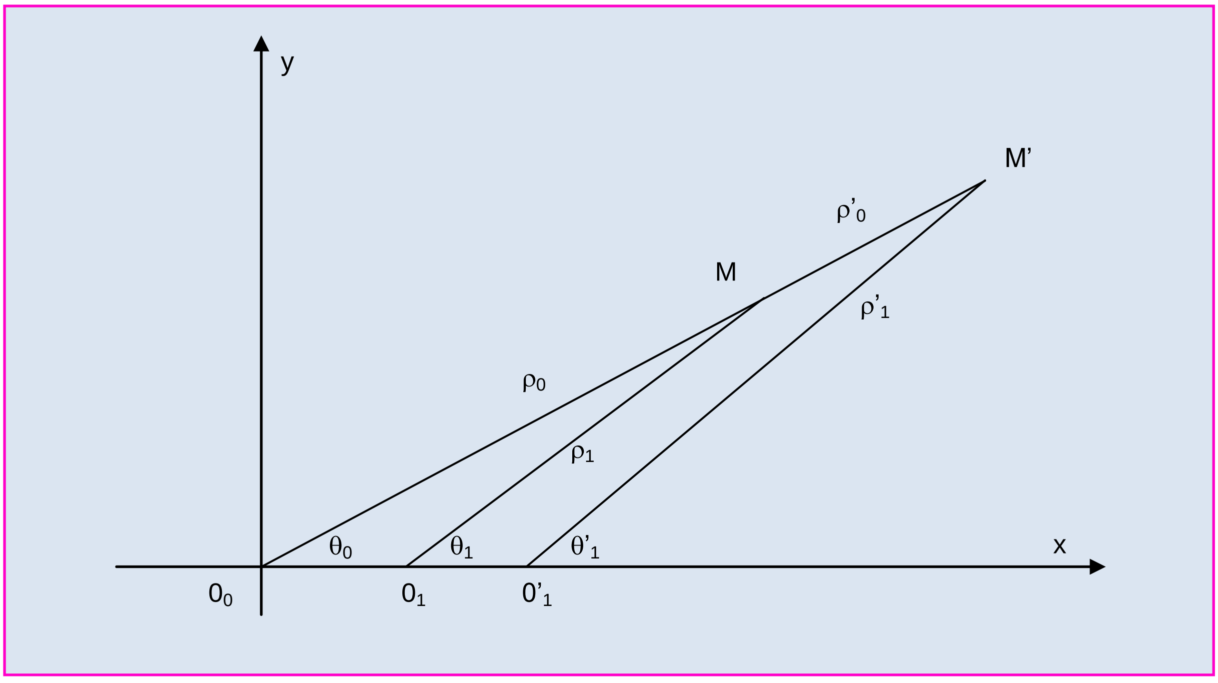


Figure 1 : Propagation d'une onde électromagnétique

Écrites dans R_0 le Référentiel de Maxwell ou Référentiel Lumière, les équations de Maxwell impliquent l'existence d'une onde EM se propageant à la vitesse de module c quelle que soit la direction.
Dans le repère R_1 c'est beaucoup plus complexe, car le module de la vitesse dépend de la direction de propagation.
Si l'on se sert des coordonnées polaires (sphériques en 3D), on a :

$\overrightarrow{c_{onde/R_0}} = c\overrightarrow{u_{\rho 0}}$ $\forall\ \theta_0$ dans le référentiel R_0

$\overrightarrow{c_{onde/R_1}} = c_\rho \overrightarrow{u_{\rho 1}} + c_\perp \overrightarrow{u_{\perp 1}}$ dans le référentiel R_1

On considère l'onde EM émise par la source dans la direction θ_0 dans R_0 :

- à t dans le référentiel R_0 l'onde est en $M_0(x_0, y_0) \equiv (\rho_0, \theta_0)$
- à t dans le référentiel R_1 l'onde est en $M_1(x_1, y_1) \equiv (\rho_1, \theta_1)$

- à t' dans le référentiel R_0 l'onde est en $M'_0(x'_0, y'_0) \equiv (\rho'_0, \theta'_0)$
- à t' dans le référentiel R_1 l'onde est en $M'_1(x'_1, y'_1) \equiv (\rho'_1, \theta'_1)$

Dans le référentiel R_0, nous pouvons écrire :

Au temps t $\begin{cases} x_0 = \rho_0 \cos\vartheta_0 \\ y_0 = \rho_0 \sin\vartheta_0 \end{cases}$

Au temps t' $\begin{cases} x'_0 = (\rho_0 + c(t'-t))\cos\vartheta_0 = x_0 + c(t'-t)\cos\vartheta_0 \\ y'_0 = (\rho_0 + c(t'-t))\sin\vartheta_0 = y_0 + c(t'-t)\sin\vartheta_0 \end{cases}$ en polaire, on a $\begin{cases} \rho'_0 = \rho_0 + c.\Delta t \\ \vartheta'_0 = \vartheta_0 \end{cases}$

Dans le référentiel R_1, nous pouvons écrire :

Au temps t $\begin{cases} x_1 = x_0 - d_1 = \rho_1 \cos\vartheta_1 \\ y_1 = y_0 = \rho_1 \sin\vartheta_1 \end{cases}$ avec $\overrightarrow{O_0O_1} = d_1\overrightarrow{u_x}$

Au temps t' $\begin{cases} x'_1 = x'_0 - d'_1 = x_0 + c(t'-t)\cos\vartheta_0 - \left(d_1 + V_1(t'-t)\right) \\ y'_1 = y'_0 = y_0 + c(t'-t)\sin\vartheta_0 \end{cases}$

où l'on a posé $\overrightarrow{O_0O'_1} = d'_1\overrightarrow{u_x} = \left[d_1 + V_1(t'-t)\right]\overrightarrow{u_x}$

d'où $\overrightarrow{M_1M'_1} = \begin{pmatrix} x'_1 - x_1 = c(t'-t)\cos\vartheta_0 - V_1(t'-t) = (c.\cos\vartheta_0 - V_1).\Delta t \\ y'_1 - y_1 = c(t'-t)\sin\vartheta_0 = (c.\sin\vartheta_0).\Delta t \end{pmatrix}$

Le vecteur vitesse de la lumière dans le référentiel R_1 est donc :

$\overrightarrow{c_{onde/R_1}} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M'_1}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} c_{x/R_1} = c.\cos\vartheta_0 - V_1 \\ c_{y/R_1} = c.\sin\vartheta_0 \end{pmatrix}$ et son module est :

$$c_{onde/R_1} = \frac{\left\|\overrightarrow{M_1M'_1}\right\|}{\Delta t} = \sqrt{c_{x/R1}^2 + c_{y/R1}^2} = \sqrt{(c.\cos\vartheta_0 - V_1)^2 + (c.\sin\vartheta_0)^2} = c\sqrt{\left(\cos\vartheta_0 - V_1/c\right)^2 + \sin^2\vartheta_0}$$

On peut aussi écrire : $c_{onde/R_1} = c\sqrt{1 + \dfrac{V_1^2}{c^2} - \dfrac{2V_1}{c}\cos\vartheta_0}$

ou bien $\left(c_{x/R_1} + V_1\right)^2 + c_{y/R_1}^2 = c^2$ qui montre que les extrémités des vecteurs vitesse $\overrightarrow{c_{onde/R_1}}$ sont sur un cercle.

De même, nous avons : $\left[\left(x'_1 - x_1\right) + V_1.\Delta t\right]^2 + \left[y'_1 - y_1\right]^2 = \left[c.\Delta t\right]^2$ qui est également un cercle.

Remarque 1 : cette formule est générale à toute onde sphérique en se mettant dans le plan $\left(Source, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\right)$ avec $\overrightarrow{V_1} = V_1 \overrightarrow{u_x}$.

Remarque 2 : on retrouve :
- $c_{onde/R1} = c - V_1$ pour $\theta_0 = 0$;
- $c_{onde/R1} = -c - V_1$ pour $\theta_0 = \pi$.

Les courbes des pages suivantes montrent bien la « déformation » des ondes dans un référentiel assimilé RP en translation par rapport au Référentiel de Maxwell ou Référentiel Lumière.
Ces courbes sont les mêmes que celles que verrait le pilote d'un avion survolant un étang à la surface duquel se propageraient des ondelettes concentriques.
Le point remarquable ici est que ces courbes correspondent à des ondes issues de l'équation de propagation obtenue par transformation classique d'un référentiel assimilé RP vers un autre.

Pour ma part, ces courbes me rassurent car la Relativité restreinte interdit que la vitesse de translation d'un référentiel par rapport à un autre soit plus grande que la vitesse de la lumière (c'est le fameux coefficient $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V_1^2}{c^2}}}$ qui impose cela).

Par un « *thought-experiment* », c'est-à-dire une expérience décrite par la pensée mais non réalisable réellement (Einstein lui-même aimait beaucoup se servir « d'*expériences de pensée* »), on peut très bien imaginer un référentiel se déplaçant 2 fois, 10 fois ou 1000 fois plus vite que la vitesse de la lumière. Quelle allure auraient les ondes EM dans un tel référentiel ? La Relativité d'Einstein n'autorise même pas de se poser la question.
J'espère que le présent chapitre commencera à convaincre le lecteur que l'introduction d'un Référentiel Privilégié (Référentiel de Maxwell ou Référentiel Lumière) dans lequel les ondes EM se propagent à la même vitesse c dans toutes les directions ainsi que l'introduction d'équations de Maxwell généralisées à un référentiel assimilé RP quelconque en translation par rapport au Référentiel Lumière est légitime.

On verra dans un prochain chapitre que l'utilisation de ce même Référentiel Lumière dans le cadre de la gravitation est très fructueuse car elle permet d'établir une équivalence entre le Référentiel Lumière qui est modifiée par la gravitation et la Relativité Générale d'Einstein.

Une bonne partie de la théorie présentée dans cet ouvrage est basée sur le fait que les équations telles que Maxwell les a écrites sont **physiquement** exactes uniquement dans un Référentiel Privilégié que j'appelle Référentiel de Maxwell ou Référentiel Lumière.

La définition du Référentiel de Maxwell est que les équations écrites par Maxwell sont physiquement vraies uniquement dans ce référentiel.

La définition du Référentiel Lumière est que la lumière se propage réellement, physiquement à la vitesse constante c dans toutes les directions uniquement dans ce référentiel.

Ces deux référentiels avec deux définitions différentes ne sont en vérité qu'un seul et même référentiel.

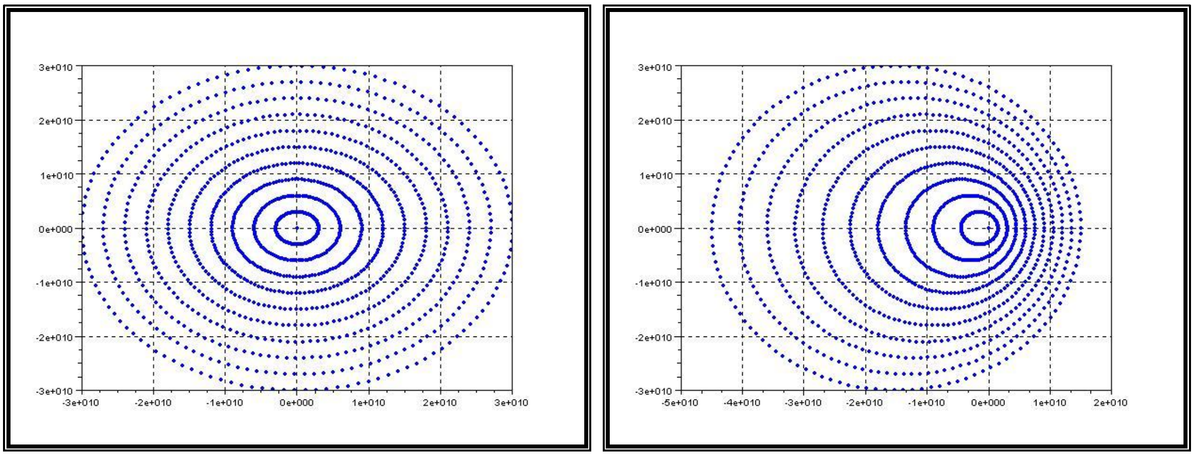


Figure 2 : Onde EM vue dans le référentiel R_1 (V_1 = 0 m/s et V_1 = +0.5 c m/s par rapport à R_0)

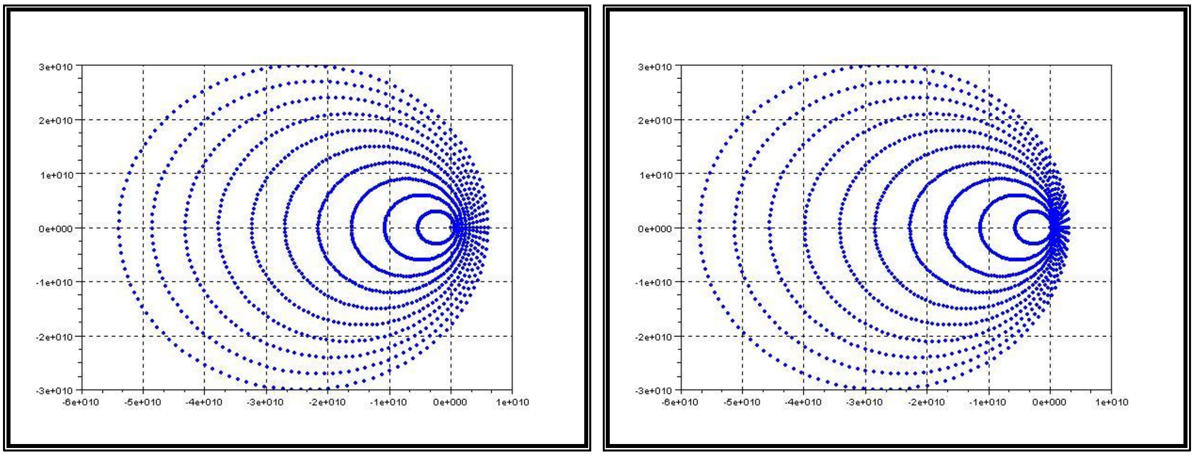


Figure 3 : Onde EM vue dans le référentiel R_1 (V_1 = +0.8 c m/s et V_1 = +0.9 c m/s par rapport à R_0)

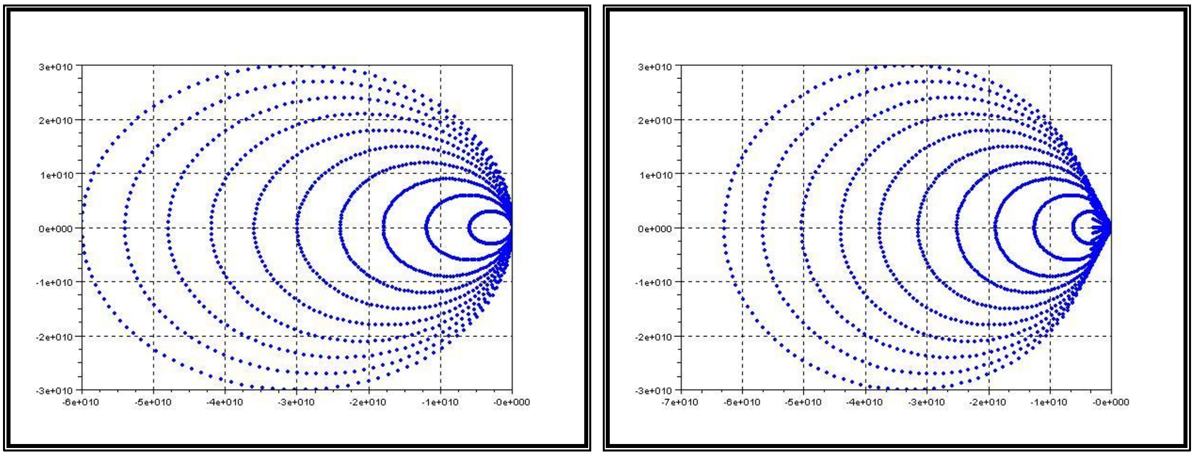


Figure 4 : Onde EM vue dans le référentiel R_1 (V_1 = +1.0 c m/s et V_1 = +1.1 c m/s par rapport à R_0)

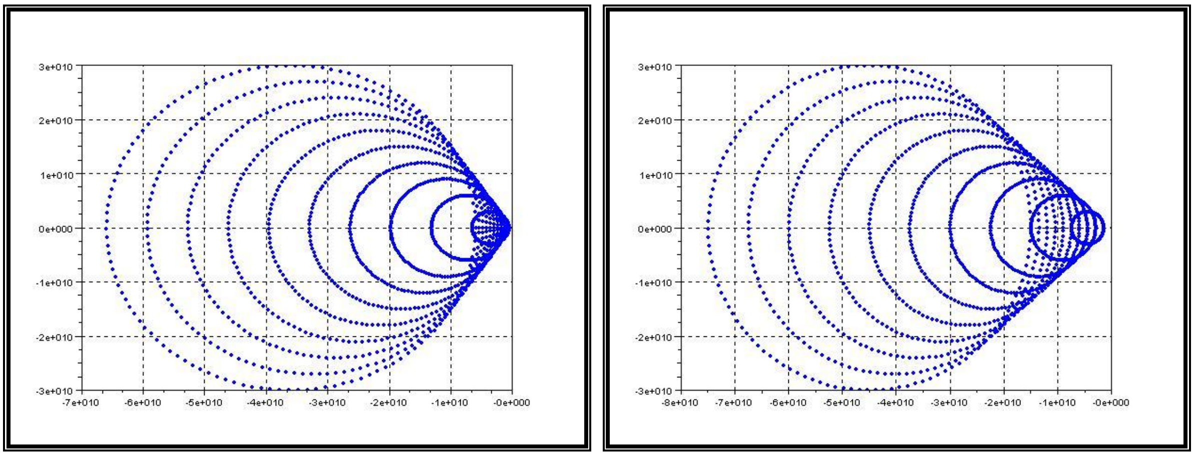


Figure 5 : Onde EM vue dans le référentiel R_1 (V_1 = +1.2 c m/s et V_1 = +1.5 c m/s par rapport à R_0)

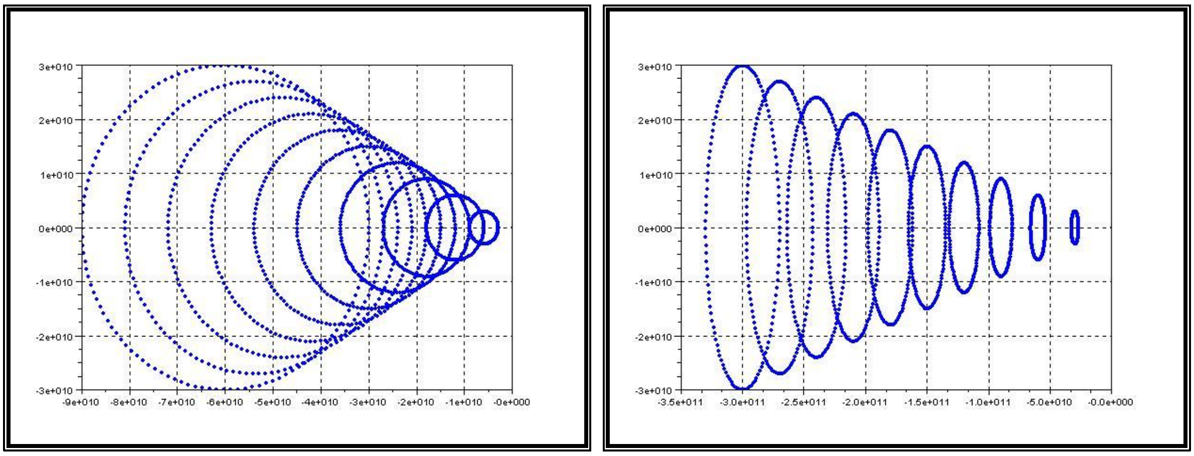


Figure 6 : Onde EM vue dans le référentiel R_1 (V_1 = +2 c m/s et V_1 = +10 c m/s par rapport à R_0)

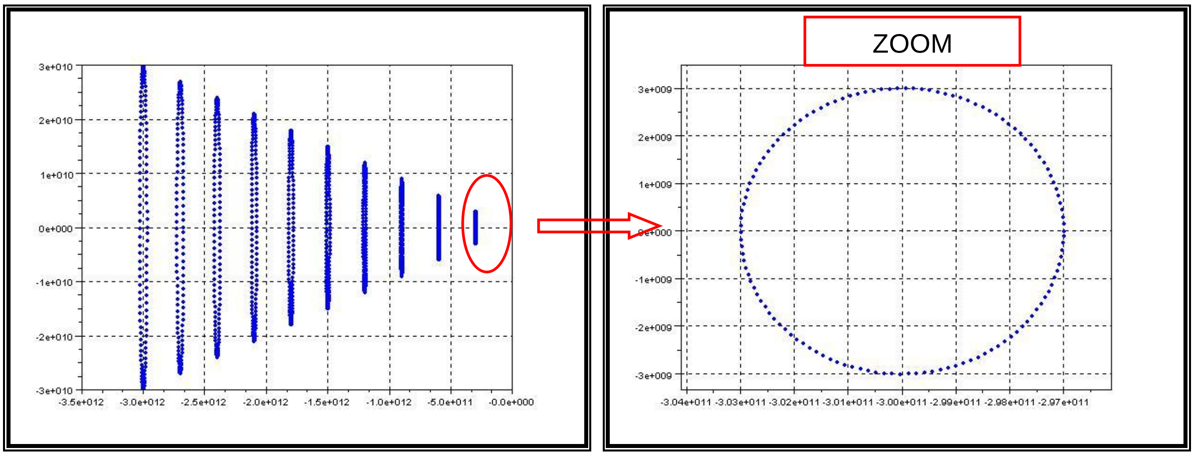


Figure 7 : Onde EM vue dans le référentiel R_1 (V_1 = +100 c m/s par rapport à R_0) + ZOOM

Il est très important de signaler que les effets de la Relativité restreinte d'Einstein s'appliquent sur la MATIÈRE au sens large et sur les INSTRUMENTS DE MESURE (constitués bien évidemment de matière), ce qui signifie que :

- une horloge liée à un référentiel matière R_1 se déplaçant à la vitesse $\vec{V_1}$ par rapport à R_0 va battre physiquement plus lentement mais cette horloge peut être considérée comme « perturbée » ou « faussée » (même si l'on sait calculer exactement l'erreur) par rapport au temps de référence du Référentiel Privilégié ;
- une règle liée à un référentiel matière R_1 se déplaçant à la vitesse $\vec{V_1}$ par rapport à R_0 va avoir une longueur physiquement plus courte que dans R_0, mais cette règle peut être considérée comme « perturbée » ou « faussée » (même si l'on sait calculer exactement l'erreur) par rapport au Référentiel Privilégié (qui est identique au Référentiel de Maxwell-Lumière) ;
- la vitesse de la lumière **apparaît** alors constante **mesurée** avec des instruments constitués de matière (horloges et règles « faussées » par la vitesse qu'elles ont par rapport au Référentiel Privilégié) mais l'existence d'un **Référentiel Privilégié** fait que la lumière subit la composition classique des vitesses en utilisant les référentiels assimilés RP.

On verra dans un prochain chapitre qu'il en est de même de la GRAVITATION dont les effets s'appliquent sur la MATIÈRE au sens large et sur les INSTRUMENTS DE MESURE (règles, horloges).

7.6 Conclusion

Ce chapitre sur l'équation de propagation généralisée de la lumière issue des équations de Maxwell et obtenue dans un référentiel assimilé RP en translation rectiligne uniforme de vitesse V par rapport au Référentiel Privilégié et conservant par la pensée des horloges de même période et des règles de même longueur que celles du Référentiel Privilégié est très intéressant pour plusieurs raisons :

- l'équation de propagation généralisée redonne l'équation bien connue lorsque $V = 0$;
- l'équation de propagation généralisée trouvée est **INVARIANTE**, c'est-à-dire que si l'on considère l'équation de propagation généralisée pour une onde électromagnétique écrite dans le référentiel R1 en mouvement à la vitesse $V_{R1/RP}$ par rapport au Référentiel Privilégié, et que l'on applique des transformations de coordonnées classiques (composition classique des vitesses avec $V_{R2/R1} = V_{R2/RP} - V_{R1/RP}$), on retombe sur l'équation de propagation généralisée pour cette même onde électromagnétique écrite dans le référentiel R2 en mouvement à la vitesse $V_{R2/RP}$ par rapport au Référentiel Privilégié ;
- les surfaces d'onde trouvées (sphères en trois dimensions) avec l'équation de propagation généralisée correspondent tout à fait à la vision qu'aurait un observateur en translation rectiligne uniforme par rapport au Référentiel Privilégié et doté des mêmes horloges et mêmes règles que celles du Référentiel Privilégié.

Dans son livre « Mécanique quantique relativiste » Michael Klasen écrit :
« Les équations du mouvement de la mécanique classique des champs ne sont pas covariantes sous les transformations de Galilée : l'équation du mouvement d'un champ $\psi(x',t')$ se propageant avec la vitesse c dans le référentiel Σ', $\left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi = 0$, où $\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3}\right)$, devient $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{c^2}\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\right)\psi = 0$ dans le référentiel Σ. Elle n'est donc pas covariante. »

Dans le cadre de ma théorie, il faudrait plutôt écrire :
« L'équation $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{c^2}\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\right)E = 0$ est l'équation de propagation généralisée. **Elle est invariante par la transformation de Galilée**. Et l'équation $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E = 0$ est la forme de l'équation généralisée dans le cas unique où elle est exprimée dans le Référentiel Privilégié défini par le milieu de propagation des ondes électromagnétiques. »

Pour être plus complet, il faut ajouter que pour la science moderne :
Quel que soit le référentiel Galiléen dans lequel des expériences sont réalisées, elles aboutissent au fait qu'il faut utiliser l'équation de propagation « standard » $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E = 0$. De là, il est possible de déduire que la lumière se propage dans tous les référentiels inertiels et en toutes directions avec la vitesse universelle c (principe de constance de la vitesse de la lumière de la relativité restreinte d'Einstein).

Dans le cadre de ma théorie, il est proposé que :
La théorie de la relativité restreinte d'Einstein est une théorie **de l'observation et de la mesure**. Les **instruments** utilisés (règles et horloges matérielles) sont perturbés à cause de leur vitesse par rapport au Référentiel Privilégié ce qui aboutit à **mesurer** une vitesse de la lumière constante.
Dans un référentiel assimilé RP dans lequel les règles ont la même longueur et les horloges la même période que celles situées dans le Référentiel Privilégié, la lumière subit la loi de composition classique des vitesses (**elle n'est donc pas constante**) et il faut utiliser l'équation de propagation généralisée.

Le point essentiel de ce chapitre est que l'équation de propagation généralisée existe, qu'elle est **invariante par la transformation de Galilée** et qu'elle possède une signification physique réelle dans tous les référentiels assimilés RP.