1. Equivalence du milieu OMNIUM et de l'espace-temps

Sommaire

1.1 Introduction du milieu OMNIUM

La théorie proposée introduit un milieu appelé OMNIUM (contraction de OMNI et MEDIUM) qui est présent dans tout l'Univers.
Ce milieu présente les caractéristiques suivantes :

- Ce milieu permet de déduire un Référentiel Privilégié ou plutôt une REFERENCE dans tout l'Univers et à toutes les échelles,
- Cette REFERENCE permet d'obtenir un temps privilégié. L'instant présent est universel, c'est-à-dire le même dans tout l'Univers,
- Ce milieu est également le milieu de propagation de la lumière,
- Ce milieu vérifie le principe d'action réciproque :
    - Le milieu est déformé par la matière et l'énergie tout comme l'espace-temps de la relativité générale,
    - La déformation du milieu détermine les trajectoires des particules (de matière et de lumière),
- Les deux derniers points expliquent qu'un rayon de lumière soit défléchi par un corps massif.

La présence d'un corps massif crée un flux du milieu (centripète c'est-à-dire dirigé vers le centre de gravité du corps massif) **de vitesse** $\boxed{V_{flux} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$ **et d'accélération** $\boxed{\gamma_{flux} = \frac{GM}{r^2}}$ où r désigne la distance au centre de gravité du corps massif.

Les démonstrations de la vitesse et de l'accélération du flux sont établies dans d'autres chapitres car elles nécessitent l'introduction d'entités constituant le milieu, ce qui alourdirait trop le présent document.

1.2 Référentiel en chute libre

Dans son livre « Les enfants d'Einstein », Clifford Will utilise systématiquement **le référentiel en chute libre** pour expliquer les phénomènes suivants en présence d'un champ de gravitation :

- Décalage des horloges (chapitre 3),
- Décalage vers le rouge (redshift) de la lumière (chapitre 3),
- Déviation de la lumière (chapitre 4),
- Retard de Shapiro (chapitre 6).

Dans leur livre « Relativité générale », Julien Grain et Aurélien Barrau utilisent de nombreuses fois le référentiel chute libre.

« On peut déjà sentir l'idée permettant d'écrire une loi compatible avec la relativité générale : il suffit de prendre une loi valable en relativité restreinte. Cette loi est alors valable dans un **référentiel en chute libre**, et son écriture sous forme tensorielle demeure automatiquement valide sous l'effet des transformations générales. La loi générique s'obtient en appliquant un changement quelconque du système de coordonnées à la formulation tensorielle de la loi écrite dans **le référentiel en chute libre**. »

« On cherche donc des lois physiques qui demeurent valides sous l'action de transformations générales. De plus, dans un **référentiel en chute libre**, les lois correctes semblent être celles satisfaisant à la relativité restreinte. Enfin, les équations entre tenseurs conservent leur forme lors des transformations générales : les tenseurs ont été construits pour cela. Cela conduit au principe de covariance généralisé postulé par Einstein. Il stipule que les lois de la physique peuvent s'exprimer sous la forme d'équations tensorielles qui se réduisent aux lois en accord avec la relativité restreinte dans un **référentiel en chute libre**. Une loi valide du point de vue de la relativité restreinte peut être généralisée afin d'être utilisée dans n'importe quel référentiel en accélération si elle est exprimée sous forme tensorielle. »

« Du point de vue géométrique, les géodésiques sont les lignes les plus courtes entre des événements d'espace-temps. Physiquement, elles sont les trajectoires des masses-test **en chute libre**. »
« On peut maintenant revenir au principe de covariance généralisé postulé par Einstein et l'exprimer plus clairement :

- Les lois physiques peuvent être exprimées comme des équations tensorielles de façon à demeurer valides par transformation vers un référentiel accéléré quelconque.
- Dans un **référentiel en chute libre**, les lois doivent être celles connues dans le cadre de la relativité restreinte. »

1.3 Principe d'équivalence, métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild décrit la géométrie de l'espace-temps autour d'un corps sphérique de masse M non chargé et qui ne tourne pas :

$$\boxed{ds^2 = \frac{c^2dt^2}{K^2(r)} - K^2(r)dr^2 - r^2d\vartheta^2 - (r\sin\vartheta)^2d\varphi^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{K(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1/2}}.$$

Sans présence de masse, c'est-à-dire dans le cadre de la relativité restreinte, l'expression du carré de la pseudo-norme est en coordonnées sphériques :
$\boxed{ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\vartheta^2 - (r\sin\vartheta)^2d\varphi^2}$.

En présence d'un champ de gravitation, seuls les deux premiers termes de l'expression subissent une correction sous la forme de la division ou multiplication par le facteur K(r) au carré.

Dans la théorie proposée, le facteur $\boxed{K(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1/2}}$ joue un rôle tout à fait équivalent au facteur $\boxed{\gamma(V) = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}}$:

- Les règles matérielles sont contractées d'un facteur γ(V) dû à leur mouvement par rapport au Référentiel Privilégié et elles sont contractées d'un facteur K(r) dû à un champ de gravitation,

- Les horloges matérielles ont leur période dilatée d'un facteur $\gamma(V)$ dû à leur mouvement par rapport au Référentiel Privilégié et elles ont leur période dilatée d'un facteur K(r) dû à un champ de gravitation.

Cependant, il existe une différence importante entre les deux cas :

- Dans le cas du mouvement d'une règle ou d'une horloge matérielle, c'est le mouvement de la règle ou de l'horloge par rapport au Référentiel Privilégié qui crée l'effet. Le milieu n'est aucunement déformé.
  On peut prendre le cas d'un vaisseau spatial ultra-léger ne déformant pratiquement pas le milieu et dont les règles et les horloges à bord vont subir les effets de leur mouvement par rapport au milieu qui définit le Référentiel Privilégié.
- Dans le cas d'un champ de gravitation, créé par un corps massif par exemple, le milieu subit un flux centripète d'autant plus élevé que l'on se rapproche du corps massif qui crée le champ de gravitation. Ce flux a pour conséquence d'altérer physiquement la longueur des règles matérielles et la période des horloges matérielles. Autre point important : le milieu étant physiquement altéré par la présence du corps massif, cette altération joue le rôle de **la courbure de l'espace** de la relativité générale.

Dans le cas d'un champ de gravitation, pour un référentiel fixe par rapport à la Terre, le Référentiel Privilégié est en mouvement à la même vitesse qu'un laboratoire en chute libre $\boxed{V_{RP} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$.

Les horloges matérielles et les règles matérielles sont donc affectées physiquement avec le facteur $\boxed{\gamma(V_{RP}) = \left(1 - \frac{V_{RP}^2}{c^2}\right)^{-1/2}}$ ce qui donne le facteur de la relativité générale :

$$\boxed{K(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2}}.$$

Ce parallèle entre la relativité restreinte et la gravitation est très profond et permet d'affirmer que, pour tout phénomène physique non statique dans un champ de gravitation, la partie due à l'effet temporel est de même grandeur que la partie due à l'effet spatial.
Cela est dû au fait qu'en relativité restreinte, le facteur intervenant dans la partie temporelle (horloges) est le même que celui intervenant dans la partie spatiale (règles).

1.4 Horloge matérielle dans un champ de gravitation

En conséquence de ce que nous venons de voir, une horloge matérielle, de période T_0 lorsqu'elle est située très loin de tout champ de gravitation, subit une dilatation de sa période d'un facteur K(r) lorsqu'elle est située à la distance r du centre de gravité d'un corps massif, de telle sorte que sa période vaut :

$$\boxed{T = T_0.K(r)} \quad \text{avec} \quad \boxed{K(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c_0^2.r}\right)^{-1/2}}.$$

1.5 Règle matérielle dans un champ de gravitation

De la même façon, une règle matérielle, d'une longueur L_0 lorsqu'elle est située très loin de tout champ de gravitation, subit une contraction d'un facteur K(r) lorsqu'elle est située à la distance r du centre de gravité d'un corps massif, de telle sorte que sa longueur vaut :

$$\boxed{L = \frac{L_0}{K(r)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{K(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c_0^2.r}\right)^{-1/2}}.$$

1.6 Décalage vers le rouge de la lumière (redshift)

Le décalage vers le rouge ou effet Einstein est le décalage fréquentiel de la lumière ou d'un signal électromagnétique dû à un champ de gravitation.
Cet effet peut être considéré comme un « corolaire » du ralentissement des horloges dû à un champ de gravitation.
En effet, si l'on considère deux horloges situées l'une à la distance r_1 et l'autre à la distance r_2 du centre d'un corps sphérique de masse M, le rapport entre les périodes des deux horloges est donné par la formule suivante :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{K(r_2)}{K(r_1)} \quad \text{avec} \quad K(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c_0^2.r}\right)^{-1/2}.$$

Il suffit alors de convertir les périodes au point d'émission et au point de réception de la lumière (ou du signal électromagnétique) en fréquences (la fréquence étant l'inverse de la période du signal considéré). Un signal émis à la fréquence F_1 à la distance r_1 du centre du corps sphérique est reçu à la distance r_2 avec la fréquence F_2 selon la formule :

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{K(r_2)}{K(r_1)}} \quad \text{avec} \quad K(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c_0^2.r}\right)^{-1/2}.$$

La théorie proposée permet de retrouver la fameuse formule du décalage fréquentiel gravitationnel.

Remarque : si la distance r_2 est très grande (« infinie »), alors nous avons $K(r_2) = 1$ et $F_2 = F_0$.

Ainsi la formule précédente s'écrit : $\frac{F_1}{F_0} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{K(r_1)}$ ou $\boxed{F_1 = \frac{F_0}{K(r_1)}}$.

Ainsi, à la surface du Soleil, des atomes émettront des photons avec une fréquence F_1 plus faible d'un facteur $K(r_1)$ par rapport à F_0 qui serait la fréquence de photons émis par les mêmes atomes sans présence de champ de gravitation.

1.7 Vitesse de la lumière en présence d'un champ de gravitation

1.7.1 Vitesse de la lumière pour une trajectoire radiale

Des deux points précédents (1.4 et 1.5), nous pouvons en tirer le résultat fondamental suivant :
la vitesse de la lumière varie en fonction de la distance au centre de gravité d'un corps massif.

En effet, très loin d'un corps massif, la vitesse de la lumière est :
$$\boxed{c_0 = \frac{L_0}{T_0}}.$$
En revanche, **lorsque la lumière suit une trajectoire radiale**, à la distance r du centre de gravité d'un corps massif, la vitesse de la lumière a réellement la valeur suivante par rapport à un référentiel lié au corps massif :
$$\boxed{c = \frac{L}{T} = \frac{L_0 / K(r)}{T_0 . K(r)} = \frac{c_0}{K^2(r)} = c_0\left(1 - \frac{2GM}{c_0^2 . r}\right)}.$$

Dans le cadre de trajectoires radiales, nous pouvons en déduire un indice de réfraction du milieu dû à la gravitation :
$$\boxed{n(r) = \frac{c_0}{c(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c_0^2 . r}}}.$$

La lumière est donc plus lente près d'un corps massif que très éloignée de lui.

Ce résultat essentiel va nous permettre de trouver la même équation donnant la déflexion d'un rayon lumineux par un corps massif que la relativité générale.
Il va nous permettre également de trouver la même équation donnant le retard de Shapiro dû à un corps massif que la relativité générale.

Un autre point essentiel est que la **mesure** de la vitesse de la lumière **donne la même valeur** quelle que soit la distance à laquelle on se trouve d'un corps massif.
En effet, si l'on possède une règle de longueur L et est une horloge de période T, telles qu'en une période de l'horloge, la lumière a parcouru la longueur de la règle, quelle que soit l'intensité du champ de gravitation on mesure :
$$\boxed{c = \frac{L}{T}}.$$
En fait, que l'on soit très éloigné de tout corps massif (absence de champ de gravitation) ou tout près de la surface d'un corps massif, la lumière va parcourir la longueur de **la même règle** pendant une période de **la même horloge**.
La **mesure** fournissant un résultat identique de la vitesse de la lumière, cela va donner l'apparence que la lumière a une vitesse constante.

1.7.2 Vitesse de la lumière dans le cas général

L'expression de la vitesse de la lumière trouvée dans la partie précédente n'est valable que pour une trajectoire radiale de la lumière.

Pour une trajectoire quelconque de la lumière l'expression de la vitesse est plus complexe et nous allons l'établir.

Le vecteur vitesse de la lumière doit en fait être décomposé selon deux composantes qui ne suivent pas la même loi car les règles ne sont contractées du facteur K(r) que lorsqu'elles sont placées le long d'une radiale du corps massif.

La composante radiale s'écrit : $c_{//}(r) = \frac{L_{//}}{T} = \frac{L_{0//}/K(r)}{T_0.K(r)} = \frac{c_{0//}}{K^2(r)} = c_{0//}.\left(1-\frac{k}{r}\right).$

La composante ortho radiale s'écrit : $c_{\perp}(r) = \frac{L_{\perp}}{T} = \frac{L_{0\perp}}{T_0.K(r)} = \frac{c_{0\perp}}{K(r)} = c_{0\perp}.\sqrt{1-\frac{k}{r}}.$

Nous avons de plus : $c_0 = \sqrt{c_{0//}^2 + c_{0\perp}^2}$.

Nous appelons $\beta = \left(\overrightarrow{u_{//}}, \vec{c}\right)$ l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{u_{//}}$ et le vecteur vitesse de la lumière $\vec{c}$.
Le vecteur $\overrightarrow{c_0}$ représente le vecteur vitesse de la lumière s'il n'y avait pas de corps massif.

Nous pouvons écrire :

$\begin{cases} c_{//}(r) = c(r)\cos\beta \\ c_{\perp}(r) = c(r)\sin\beta \end{cases}$ ce qui nous donne : $\begin{cases} c_{0//} = K^2.c(r)\cos\beta \\ c_{0\perp} = K.c(r)\sin\beta \end{cases}.$

Nous avons alors :

$$c_0 = \sqrt{c_{0//}^2 + c_{0\perp}^2} = K.c(r)\sqrt{(K.\cos\beta)^2 + \sin^2\beta}.$$

Nous obtenons donc le module du vecteur vitesse de la lumière :

$\boxed{c(r) = \frac{c_0}{K\sqrt{(K.\cos\beta)^2 + \sin^2\beta}}}$ que nous pouvons également écrire :

$\boxed{c(r) = \frac{c_0}{K\sqrt{1+(K^2-1)\cos^2\beta}}}$ ou également : $\boxed{c(r) = c_0\sqrt{1-\frac{k}{r}}.\left(1+\frac{k}{r-k}\cos^2\beta\right)^{-1/2}}$

avec $K(r) = \left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1/2}$ et $k = \frac{2GM}{c_0^2}$.

1.7.3 Approximation de la vitesse de la lumière

Nous allons donner une approximation de la vitesse de la lumière dans le cas où k/r << 1.
Nous pouvons alors écrire :

$$c(r) = c_0\left(1-\frac{k}{2r}\right)\left(1-\frac{k}{2r}\cos^2\beta\right).$$

En développant cette expression et en négligeant le quatrième terme en $(k/r)^2$ nous obtenons :

$$\boxed{c(r) = c_0\left[1 - \frac{k}{2r}\left(1+\cos^2\beta\right)\right]}.$$

1.7.4 Approximation de la dérivée de la vitesse de la lumière

Nous considérons le repère $\left(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y}\right)$ ayant son origine au centre de gravité du corps massif et nous supposons que la trajectoire de la lumière est comprise dans le plan $\left(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y}\right)$.

Nous définissons les angles suivants : $\varphi = \left(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{OM}\right)$ $\quad \alpha = \left(\overrightarrow{u_x},\vec{c}\right)$ $\quad \beta = \left(\overrightarrow{u_{//}},\vec{c}\right)$.

En prenant la convention de prendre les angles toujours entre 0 et π/2 nous avons :
$\beta = \varphi + \alpha$.

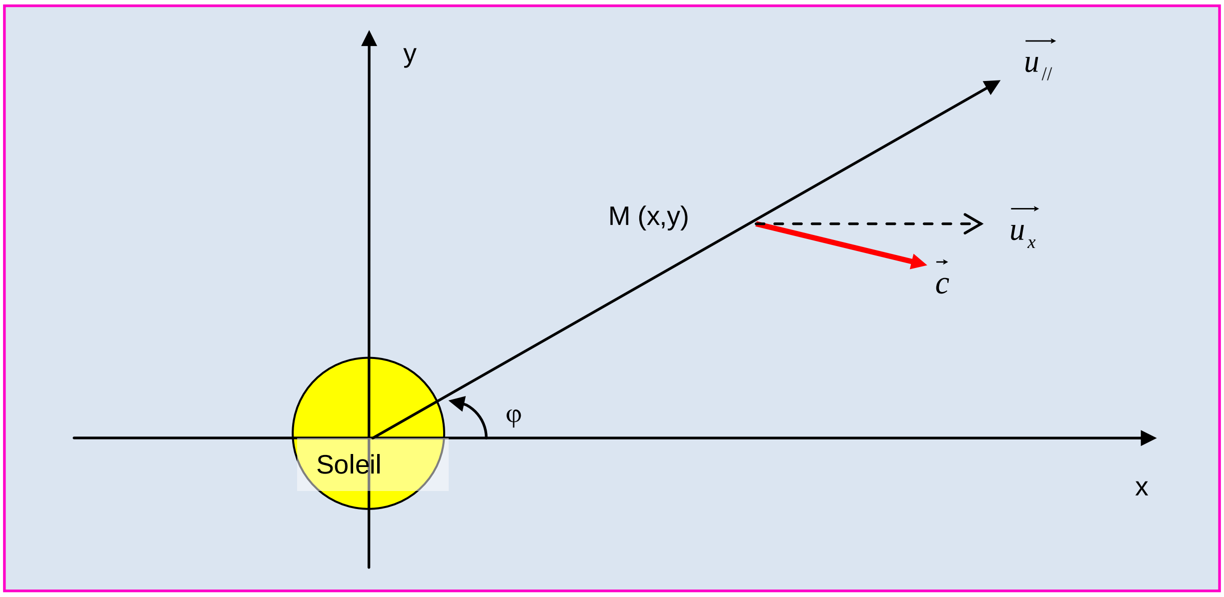

Figure 1 : Angles associés au rayon lumineux

En faisant l'approximation que la lumière se propage en ligne droite (l'angle de déflexion dû au Soleil est très faible) et en choisissant l'axe des abscisses parallèle à la trajectoire du rayon lumineux nous avons $\alpha \approx 0$ et $\sin\varphi = \frac{y}{r} \approx \frac{r_{\min}}{r}$.

$$c(r) = c_0\left[1 - \frac{k}{2r}\left(1+\cos^2(\varphi+\alpha)\right)\right] \approx c_0\left[1 - \frac{k}{2r}\left(1+\cos^2\varphi\right)\right] \approx c_0\left[1 - \frac{k}{2r}\left(2-\sin^2\varphi\right)\right].$$

Nous obtenons finalement :

$$c(r) \approx c_0\left[1 - \frac{k}{2r}\left(2 - \frac{r_{\min}^2}{r^2}\right)\right] \approx c_0 - \frac{c_0 k}{r} + \frac{c_0 k.r_{\min}^2}{2r^3} .$$

Une approximation de la dérivée de la vitesse de la lumière s'écrit donc :

$$c'(r) \approx \frac{c_0 k}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{c_0 k.r_{\min}^2}{r^4} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{c'(r) \approx \frac{c_0 k}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_{\min}^2}{r^2}\right)}.$$

1.8 Les trois effets prédits par la théorie proposée

Les trois effets dus à la gravitation prédits par la théorie proposée sont les suivants :

- (1a) dilatation des périodes des horloges : $T = T_0.K$,
- (1b) contraction des longueurs des règles : $L = L_0 / K$,
- (2) déformation du milieu OMNIUM : la gravitation crée un flux centripète de vitesse $V_{flux} = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$ et d'accélération $\gamma_{flux} = \dfrac{GM}{r^2}$.

Les deux premiers effets ont été notés (1a) et (1b) car :

- Ils sont tout à fait équivalents à la dilatation des durées et contraction des longueurs de la relativité restreinte,
- Les deux effets cumulés sont équivalents à l'effet (1c) : diminution de la vitesse de la lumière dans un champ de gravitation selon la loi $c(r) = \dfrac{c_0}{K\sqrt{1+(K^2-1)\cos^2\beta}}$.

Le troisième effet (2) est propre au domaine de la gravitation. C'est donc un effet supplémentaire par rapport à la relativité restreinte (qui correspond à un milieu non déformé).

1.9 Déflexion d'un rayon lumineux

1.9.1 Loi de Snell-Descartes

Il est connu depuis plusieurs siècles que la lumière est défléchie en passant d'un milieu à un autre milieu, ce qui s'appelle la réfraction.
Si le premier milieu possède un indice de réfraction n_1, le second milieu un indice n_2, alors la relation entre l'angle d'incidence i (angle entre le rayon incident et la normale N au plan de séparation des deux milieux) et l'angle réfracté r (angle entre le rayon réfracté et la normale N) est la fameuse loi de Snell-Descartes qui s'écrit :
$n_1.\sin(i) = n_2.\sin(r)$.

Si l'on utilise les deux relations $c_1 = \dfrac{c_0}{n_1}$ et $c_2 = \dfrac{c_0}{n_2}$, la loi de Snell-Descartes s'écrit :

$$\boxed{\frac{\sin(i)}{c_1} = \frac{\sin(r)}{c_2}}.$$

Si la vitesse c_2 est plus faible que la vitesse c_1, alors l'angle de réfraction est plus faible que l'angle d'incidence.
On peut en déduire que la lumière est défléchie dans la direction où la vitesse de la lumière est plus faible.
Nous pouvons en déduire la règle suivante :
Un corps massif a pour effet de ralentir la lumière quand elle se rapproche de son centre de gravité et de créer une déviation du rayon lumineux orientée vers le corps massif.

1.9.2 Approche de Huygens-Fresnel

En utilisant l'approche de Huygens-Fresnel, l'angle élémentaire de déflexion du rayon lumineux est donné par la formule suivante :
$d\alpha = \frac{\partial c}{\partial s} dt = \frac{\partial c}{\partial s} \frac{ds}{c_0}$ où s représente l'abscisse curviligne parcouru par le rayon lumineux, ds une partie élémentaire de cette abscisse curviligne et $dt = \frac{ds}{c_0}$.

En un point M donné le long du parcours du rayon lumineux, on appelle φ l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{ds}$ et le vecteur $\overrightarrow{dr}$.

Nous avons donc : $dr = \cos\varphi . ds$ et donc $ds = \frac{dr}{\cos\varphi}$ et $\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\partial c}{\partial r}\cos\varphi$.

En tenant compte de cette relation entre ds et dr, nous pouvons écrire l'angle élémentaire de déflexion du rayon lumineux de la façon suivante :
$\boxed{d\alpha = \frac{1}{c_0}\frac{\partial c}{\partial s} ds = \frac{1}{c_0}\frac{\partial c}{\partial r} dr}$ pour une rayon lumineux s'éloignant du corps massif, c'est-à-dire pour lequel $\frac{\partial c}{\partial r} > 0$.

L'angle de déflexion du rayon lumineux dû au ralentissement de la lumière est donc donné par la formule :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \int_{-\infty}^{r_{\min}} -\frac{1}{c_0}\frac{\partial c}{\partial r} dr \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{1}{c_0}\frac{\partial c}{\partial r} dr .$$

$r_{\min}$ représente la distance entre la trajectoire de la lumière et le centre de gravité du corps massif lorsque la lumière est au plus proche du corps massif.

Nous avons : $\alpha_2 = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{1}{c_0}\frac{\partial c}{\partial r} dr = \frac{1}{c_0}\left[c(r)\right]_{r_{\min}}^{+\infty} = \frac{c(\infty) - c(r_{\min})}{c_0} = \frac{c_0 - c(r_{\min})}{c_0}$ car $c(\infty) = c_0$.

Pour une raison évidente de symétrie nous avons $\alpha_1 = \alpha_2$ (ce qui est confirmé par le calcul de α_1) donc au final nous obtenons :

$$\boxed{\alpha = 2\frac{c_0 - c(r_{\min})}{c_0}}.$$

Remarque :
Une expression plus exacte de l'angle élémentaire de déflexion du rayon lumineux est la suivante :

$$\boxed{d\alpha = \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial s} ds = \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial r} dr}.$$

Nous obtenons alors l'angle de déflexion du rayon lumineux dû au ralentissement de la lumière :

$$\alpha = 2\int_{r_{\min}}^{r_\infty} \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial r} dr = 2\left[\ln(c(r))\right]_{r_{\min}}^{+\infty} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\alpha = 2\ln\left(\frac{c_0}{c(r_{\min})}\right)}.$$

1.9.3 Angle de déflexion total d'un rayon lumineux

1.9.3.1 Partie due au ralentissement de la lumière

La vitesse de la lumière a pour expression approchée : $c(r) \approx c_0\left[1-\frac{k}{2r}\left(1+\cos^2\beta\right)\right]$.

A une distance infinie du corps massif nous avons : $c(r_\infty)=c_0$.
A la distance minimale du corps massif $r=r_{\min}$ nous avons $\beta \approx \pi/2$ d'où :
$c(r_{\min}) \approx c_0\left(1-\frac{k}{2r_{\min}}\right)$.

En utilisant la relation $\alpha = 2\frac{c_0 - c(r_{\min})}{c_0}$ nous obtenons immédiatement l'angle de déflexion :

$$\boxed{\alpha = \frac{k}{r_{\min}} = \frac{2GM}{c_0^2 . r_{\min}}}.$$

En utilisant la relation $\alpha = 2\ln\left(\frac{c_0}{c(r_{\min})}\right)$ nous obtenons :

$$\boxed{\alpha = -2\ln\left(1-\frac{k}{2r_{\min}}\right) \approx \frac{k}{r_{\min}} = \frac{2GM}{c_0^2 . r_{\min}}}.$$

1.9.3.2 Partie due à la déformation du milieu

La partie due à la déformation du milieu consiste dans le fait que le milieu de propagation de la lumière subit un flux centripète de part la présence d'un corps massif.

Ce flux centripète est d'autant plus rapide que l'on se rapproche du corps massif et son accélération est donnée au premier ordre par l'expression suivante :
$\gamma = \frac{GM}{r^2}$.

Le milieu de propagation de la lumière subissant un flux centripète, il est évident que cela impacte un rayon lumineux qui se propage dans son milieu de propagation et cela infléchit sa trajectoire dans la direction du centre de gravité du corps massif.

La loi fondamentale est qu'un rayon lumineux **garde sa direction** dans un référentiel lié à son milieu, c'est-à-dire **le Référentiel Privilégié** (on devrait dire **la Référence** puisque ce référentiel se déforme vu par un référentiel lié au corps massif).
Cela implique que dans un référentiel lié au corps massif, pour un déplacement élémentaire du rayon lumineux $dL = c_0 .dt$, le Référentiel Privilégié s'est déplacé de façon centripète d'une longueur $dL_{RP} = V_{RP} .dt$ avec $V_{RP} = \gamma_{RP} .dt$ et $\gamma_{RP} = \frac{GM}{r^2}$.

Pour un rayon lumineux pratiquement rectiligne et que l'on choisit parallèle à l'axe des abscisses dans un repère où l'origine est placée au centre de gravité du corps massif, celui-ci subit une déflexion élémentaire d'un angle dα donné par la relation suivante :

$$\tan(d\alpha) = \frac{dL_{RP}.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{dL}$$

en prenant (r, φ) les coordonnées polaires du point M courant et (x, y) ses coordonnées cartésiennes comme le montre le schéma ci-dessous.

Le terme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ vient du fait que le rayon lumineux suit une trajectoire pratiquement parallèle à l'axe des abscisses alors que le flux centripète du milieu est le long de la radiale du corps massif au point courant M.

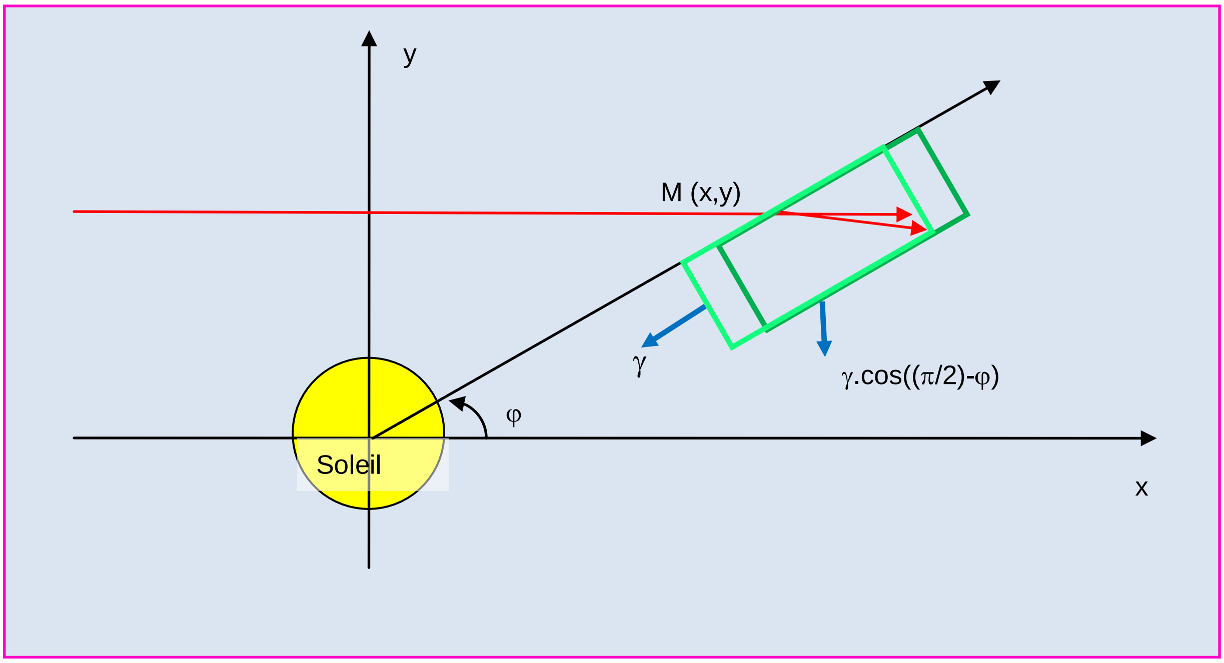

Figure 2 : Déflexion d'un rayon lumineux par le Soleil

Le rectangle vert symbolise un référentiel en chute libre (par exemple un laboratoire ou un ascenseur en chute libre avec un mouvement centripète vers le centre de gravité du corps massif). Il symbolise également un volume du milieu qui subit un flux centripète.

Poursuivons le calcul de l'angle élémentaire de déflexion :

$$\tan(d\alpha) = \frac{dL_{RP}.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{dL} = \frac{V_{RP}.dt.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{c_0.dt} = \frac{V_{RP}.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{c_0} = \frac{\gamma_{RP}.dt.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{c_0}$$

$\tan(d\alpha) = \frac{GM}{r^2}\frac{\sin(\varphi)}{c_0}dt$ avec $dL = c_0.dt \approx dx$ et $\sin(\varphi) = \frac{y}{r} \approx \frac{R}{r}$ où R désigne la distance de la trajectoire du rayon lumineux la plus proche du centre de gravité du corps massif.

D’où finalement l’expression de l’angle élémentaire :

$$\boxed{d\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{GMR}{c_0^2}\frac{dx}{r^3}\right) \approx \frac{GMR}{c_0^2}\frac{dx}{r^3}}.$$

En supposant que le rayon lumineux vient de l’infini et repart à l’infini selon l’axe des abscisses, l’angle total de déflexion est donné par la formule suivante :

$$\alpha = \int d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMR}{c_0^2}\frac{dx}{r^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMR}{c_0^2}\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMR}{c_0^2}\frac{dx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}.$$

En posant $u = \frac{x}{R}$ nous avons :

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMR}{c_0^2}\frac{R.du}{\left((R.u)^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{GM}{c_0^2 R}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\left(u^2+1\right)^{3/2}} = \frac{2GM}{c_0^2 R}\int_{0}^{+\infty}\frac{du}{\left(u^2+1\right)^{3/2}}.$$

Nous utilisons alors le résultat bien connu $\int_{0}^{+\infty}\frac{du}{\left(u^2+1\right)^{3/2}} = \left[\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right]_0^{+\infty} = 1$ qui nous permet d’obtenir finalement l’angle de déflexion du rayon lumineux dû à la déformation du milieu générant un flux centripète :

$$\boxed{\alpha_{flux} = \frac{2GM}{c_0^2 R}}.$$

1.9.3.3 Angle de déflexion total dû au ralentissement de la lumière et au flux du milieu

L’angle de défection total est la somme de l’angle dû à la diminution de la vitesse de la lumière et de l’angle dû au flux centripète du milieu :

$$\boxed{\alpha_{total} = \alpha_{vitesse} + \alpha_{flux} = \frac{2GM}{c_0^2 r_{\min}} + \frac{2GM}{c_0^2 R} = \frac{4GM}{c_0^2 r_{\min}}}.$$

On retrouve bien la célèbre formule de la relativité générale.

Remarque1 :
Par curiosité, même si cela ne correspond pas à un raisonnement correct, on peut regarder ce que donne l’utilisation de la formule de la vitesse de la lumière obtenue dans le cas radial : $c = c_0\left(1 - \frac{2GM}{c_0^2 .r}\right)$.

En utilisant la relation $\alpha = 2\frac{c_0 - c(r_{\min})}{c_0}$ nous obtenons immédiatement l’angle de déflexion de la relativité générale : $\boxed{\alpha = \frac{4GM}{c_0^2 .r_{\min}}}$.

En utilisant la relation $\alpha = 2\ln\left(\dfrac{c_0}{c(r_{\min})}\right)$ nous obtenons également l'angle de déflexion de la relativité générale : $\boxed{\alpha = -2\ln\left(1 - \dfrac{2GM}{c_0^2 r_{\min}}\right) \approx \dfrac{4GM}{c_0^2 . r_{\min}}}$.

Remarque 2 :
Toujours dans le cadre du cas radial, en utilisant la formule $n_1.\sin(i) = n_2.\sin(r)$ ou la formule $\dfrac{\sin(i)}{c_1} = \dfrac{\sin(r)}{c_2}$ sur des portions élémentaires successives du rayon lumineux dans une simulation, nous obtenons exactement la valeur de l'angle de déflexion du rayon lumineux α = 1,75 seconde d'arc dans le cas d'un rayon lumineux passant à proximité de la surface du Soleil.

1.10 Effet Shapiro

1.10.1 Effet Shapiro radial

On étudie l'effet Shapiro le long d'une radiale d'un corps massif de masse M et de centre de gravité O.

Comme la trajectoire de la lumière est radiale, nous allons utiliser le résultat établi dans la partie 1.7.1 qui est que la lumière se propage plus lentement au voisinage d'un corps massif avec une vitesse ayant pour expression :

$$c = c_0\left(1 - \frac{k}{r}\right) \quad \text{avec } k = \frac{2GM}{c_0^2}.$$

On considère le temps que met la lumière pour aller d'un point M_1 ($r_1 = OM_1$) à un autre point M_2 ($r_2 = OM_2$), les trois points O, M_1, M_2 étant alignés dans cet ordre :

$$\Delta t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{c(r)} = \frac{1}{c_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - \frac{k}{r}} = \frac{1}{c_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{r-k}dr = \frac{1}{c_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{r-k+k}{r-k}dr = \frac{1}{c_0}\int_{r_1}^{r_2} dr + \frac{k}{c_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r-k}.$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta t = \frac{r_2 - r_1}{c_0} + \frac{k}{c_0}\left[\ln(r-k)\right]_{r_1}^{r_2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\Delta t = \frac{r_2 - r_1}{c_0} + \frac{k}{c_0}\ln\left(\frac{r_2 - k}{r_1 - k}\right)}.$$

On reconnait immédiatement la durée dans le cas newtonien $\Delta t_{Newton} = \dfrac{r_2 - r_1}{c_0}$.

En négligeant k devant r_1 et r_2, on obtient finalement :

$$\boxed{\Delta t = \Delta t_{Newton} + \frac{2GM}{c_0^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Exemple : cas d'un photon partant de la surface du Soleil de rayon R_S et arrivant à la surface de la Terre de rayon R_T, D_{ST} représente la distance Soleil – Terre (prise par rapport aux centres de gravité) :

$$\Delta t = \Delta t_{Newton} + \frac{2GM}{c_0^3}\ln\left(\frac{D_{ST} - R_S - R_T}{R_S}\right)$$

en ne prenant en compte que le champ de gravitation dû au Soleil.

1.10.2 Effet Shapiro non radial

Dans ce cas, nous allons considérer le trajet d'un rayon lumineux allant d'un point M_1 de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) à un point M_2 de coordonnées cartésiennes (x_2, y_2).

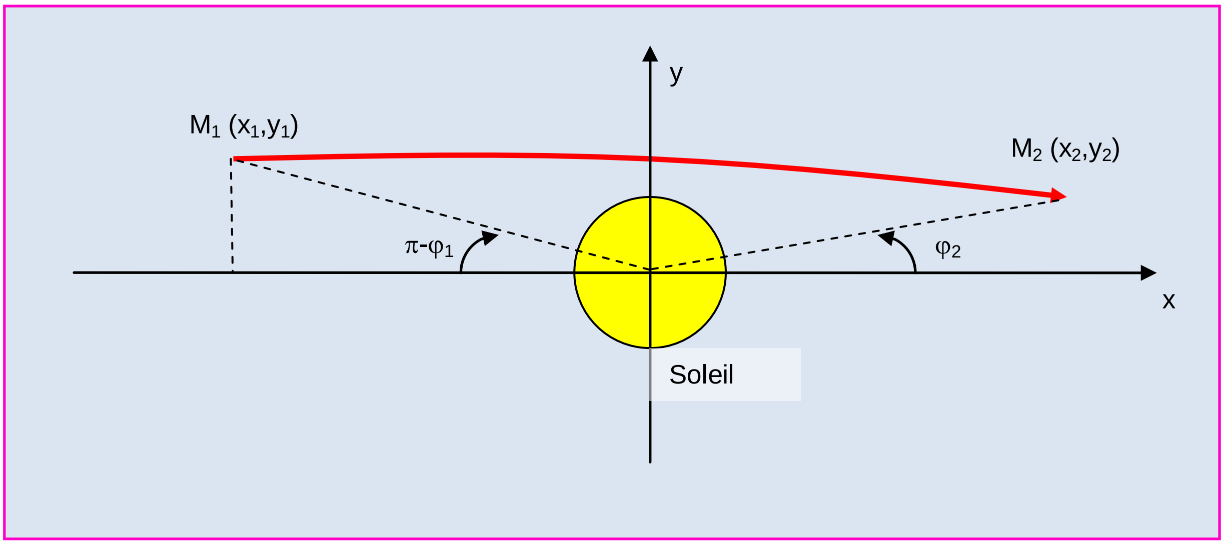

Figure 3 : Ralentissement de la lumière par le Soleil

Le temps que met la lumière pour aller du point M_1 au point M_2 est :

$$\Delta t = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dx}{c(r)}.$$

La vitesse de la lumière a pour expression approchée (voir 1.7.4) :

$$c(r) \approx c_0\left[1 - \frac{k}{2r}\left(1 + \cos^2\beta\right)\right] = c_0\left[1 - \frac{k}{2r}\left(1 + \cos^2(\varphi + \alpha)\right)\right] \approx c_0\left[1 - \frac{k}{2r}\left(1 + \cos^2\varphi\right)\right].$$

En utilisant la formule $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$ nous avons $c(r) \approx c_0\left[1 - \dfrac{k}{2r} - \dfrac{kx^2}{2r^3}\right]$ et donc :

$$\Delta t = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dx}{c(r)} \approx \frac{1}{c_0}\int_{x_1}^{x_2}\left[1 + \frac{k}{2r}\left(1 + \cos^2\varphi\right)\right]dx = \frac{1}{c_0}\int_{x_1}^{x_2} dx + \frac{k}{2c_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{r} + \frac{k}{2c_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2}{r^3}dx.$$

$\Delta t_{Newton} = \dfrac{1}{c_0}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} dx = \dfrac{x_2 - x_1}{c_0}$ représente le temps aller du rayon lumineux dans le cadre newtonien.

Si l'on pose $f(x)=\ln(x+r)$ alors on a :

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\frac{1+\frac{dr}{dx}}{x+r}=\frac{1+\frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{dx}}{x+r}=\frac{1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+r}=\frac{1+\frac{x}{r}}{x+r}=\frac{1}{r}.$$

En posant $g(x)=\frac{x}{r}$ nous avons : $g'(x)=\frac{1}{r}-x\frac{\frac{dr}{dx}}{r^2}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}$.

Finalement nous avons :

$$\Delta t\approx\Delta t_{Newton}+\frac{k}{2c_0}\int_{x_1}^{x_2}\left(2.f'(x)-g'(x)\right)dx\approx\Delta t_{Newton}+\frac{k}{2c_0}\left[2.f(x_2)-2.f(x_1)-g(x_2)+g(x_1)\right].$$

$$\boxed{\Delta t\approx\Delta t_{Newton}+\frac{k}{2c_0}\left[2.\ln\left(\frac{x_2+r_2}{x_1+r_1}\right)-\frac{x_2}{r_2}+\frac{x_1}{r_1}\right]}.$$

Cette formule peut également s'écrire : $\Delta t\approx\Delta t_{Newton}+\frac{k}{2c_0}\left[2.\ln\left(\frac{(r_2+x_2).(r_1-x_1)}{y_1^2}\right)-\frac{x_2}{r_2}+\frac{x_1}{r_1}\right]$.

En utilisant de nouveau la relation $\cos\varphi=\frac{x}{r}$ nous obtenons finalement :

$$\boxed{\Delta t\approx\Delta t_{Newton}+\frac{k}{2c_0}\left[2.\ln\left(\frac{r_1.r_2}{y_1^2}(1-\cos\varphi_1).(1+\cos\varphi_2)\right)+\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\right]}\quad \text{avec}\quad k=\frac{2GM}{c_0^2}.$$

Cas où $\varphi_1\approx\pi$ et où $\varphi_2\approx 0$ (c'est-à-dire $\cos\varphi_1\approx-1$ et $\cos\varphi_2\approx 1$) :

$$\boxed{\Delta t\approx\Delta t_{Newton}+\frac{k}{c_0}\left[\ln\left(4\frac{r_1.r_2}{r_{\min}^2}\right)-1\right]}\quad \text{en remarquant que}\quad y_1\approx r_{\min}.$$

Remarque 1 :
L'effet (2) de la partie 1.8 qui consiste en une déformation du milieu (concrètement un flux centripète du milieu) ne donne lieu qu'à une déflexion de la lumière qui n'apporte qu'un terme négligeable au retard Shapiro. Cela est également le cas en relativité générale et cela a été vérifié par simulation.

Remarque 2 :
Par curiosité, même si cela ne correspond pas à un raisonnement correct, on peut regarder ce que donne l'utilisation de la formule de la vitesse de la lumière obtenue dans le cas radial :

$$c = c_0\left(1 - \frac{2GM}{c_0^2.r}\right) = c_0\left(1 - \frac{k}{r}\right).$$

Le temps que met la lumière pour aller du point M_1 au point M_2 est :

$$\Delta t = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dx}{c(r)} = \frac{1}{c_0}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{1-\frac{k}{r}} \approx \frac{1}{c_0}\int_{x_1}^{x_2}\left(1+\frac{k}{r}\right)dx = \frac{1}{c_0}\int_{x_1}^{x_2} dx + \frac{k}{c_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{r} = \Delta t_{Newton} + \frac{k}{c_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{r}.$$

D'après les calculs déjà effectués précédemment nous avons :

$$\Delta t = \Delta t_{Newton} + \frac{k}{c_0}\left[\ln(x+r)\right]_{x_1}^{x_2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\Delta t = \Delta t_{Newton} + \frac{k}{c_0}\ln\left(\frac{x_2+r_2}{x_1+r_1}\right)}.$$

On peut écrire : $\dfrac{x_2+r_2}{x_1+r_1} = \dfrac{x_2+r_2}{x_1+r_1}\,\dfrac{r_1-x_1}{r_1-x_1} = \dfrac{(r_2+x_2)(r_1-x_1)}{r_1^2-x_1^2} = \dfrac{r_1r_2}{y_1^2}\left(1-\dfrac{x_1}{r_1}\right)\left(1+\dfrac{x_2}{r_2}\right).$

En utilisant la relation $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$ et $y_1 \approx y_2 \approx r_{\min}$ nous obtenons :

$$\boxed{\Delta t = \Delta t_{Newton} + \frac{k}{c_0}\ln\left[\frac{r_1r_2}{r_{\min}^2}(1-\cos\varphi_1)(1+\cos\varphi_2)\right]} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2GM}{c_0^2}.$$

Pour un signal électromagnétique partant de très loin du corps massif, s'approchant à $r_{\min}$ puis s'éloignant très loin du corps massif on a $\varphi_1 \approx \pi$ et $\varphi_2 \approx 0$ d'où :

$$\boxed{\Delta t = \Delta t_{Newton} + \frac{k}{c_0}\ln\left[4\frac{r_1r_2}{r_{\min}^2}\right]} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2GM}{c_0^2}.$$

1.11 Conclusions

La métrique de Schwarzschild décrit la géométrie de l'espace-temps autour d'un corps sphérique de masse M :

$$\boxed{ds^2 = \frac{c^2dt^2}{K^2(r)} - K^2(r)dr^2 - r^2d\vartheta^2 - (r\sin\vartheta)^2d\varphi^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{K(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1/2}}.$$

Elle nous montre de façon claire qu'il existe un effet temporel et un effet spatial liés à la présence d'un champ de gravitation.

Nous allons déterminer pour les cinq premiers tests de la relativité générale quels effets ils font intervenir.

Phénomène physique / test	Effets
Avance du périhélie de Mercure	Effet temporel ET effet spatial
Déflexion des rayons lumineux	Effet temporel ET effet spatial
Horloges à différentes altitudes	Effet temporel
Décalage vers le rouge (redshift)	Effet temporel
Effet Shapiro	Effet temporel ET effet spatial

Nous avons vu dans le présent document que la théorie proposée explique 4 des 5 premiers tests de la relativité générale qui comportent des effets temporel et spatial.

Cela nous conforte dans le fait que la théorie proposée est équivalente à la relativité générale. Dans les deux théories il existe des effets temporels et des effets spatiaux.

Cependant il existe des différences importantes entre les deux théories qui sont les suivantes :

Relativité Générale	Théorie proposée
Simultanéité relative (à l'observateur)	**Simultanéité absolue** (indépendante de l'observateur)
Existence d'un univers bloc total (contenant tous les événements passés, présents et futurs)	**La seule réalité physique est l'instant présent universel**, le passé n'existe plus, le futur est ouvert et n'existe pas encore
L'éther n'existe pas	Existence du **milieu de propagation de la lumière**
Pas de référentiel privilégié	Existence d'un **Référentiel Privilégié**
Invariance de la vitesse de la lumière	La **mesure** de la vitesse de la lumière est toujours égale, mais la lumière est réellement ralentie par un champ de gravitation

La théorie proposée est une extension de la théorie de Lorentz au domaine de la gravitation dans le sens où les instruments (règles, horloges) sont perturbés par la gravitation et ce n'est seulement que **la mesure** de la vitesse de la lumière qui donne toujours le même résultat, la lumière étant réellement ralentie par un champ de gravitation.